数理解析研究所講究録
287巻 1977年 70-87

Harmonic analysis on affine symmetric spaces

東大理 大島利雄
京大理 関口次郎

1 問題

Riemannian symmetric space 上の不変微分作用素の同時固有函数と，そのMartin 境界上の line bundle の hyperfunction sections の間には（generic には）Poisson 積分と境界値を取る操作とによって，1対1の対応がある．

ここでは，"Riemannian symmetric space をある compact real analytic manifold に open に埋め込んだ時にその外側にあらわれる" 必ずしも Riemannian とは限らない symmetric space に対して，上に述べた命題の類似を考えることにする．

必ずしも Riemannian とは限らない symmetric space（それを affine symmetric space と呼ぶことにする）の分類は M.Berger [1] にある．ここで考察の対象にするもの

は，そのうちの特殊なものである．もっと一般的に扱うことも可能だと思われるが，それについてはふれない．

特に断わらないで使う記号は大島[3]参照のこと．

2．岩沢分解

Gを connected real semisimple Lie group with finite center，Kをその maximal compact subgroup，それぞれの Lie algebraを $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$とする．$\mathfrak{k}$に関する$\mathfrak{g}$の Cartan involutionをθとする．$(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$に関する root systemを$\Sigma$で表わし，それに順序を入れておく．positive simple roots の集合を$\Psi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_\ell\}$とする．

次の条件をみたす写像 $\varepsilon:\Sigma\longrightarrow\{-1,1\}$ を考える．

(i) $\varepsilon(\alpha_i)=\pm1$ for $\alpha_i\in\Psi$

(ii) $\varepsilon(\alpha)=(-1)^{\sum_{i=1}^{\ell}m_i}$ for $\alpha=\sum_{i=1}^{\ell}m_i\alpha_i\in\Sigma$

εに対して$\mathfrak{g}$の involution θ_εを

$$\theta_\varepsilon(X)=\varepsilon(\alpha)\theta(X)\qquad\text{for } X\in\mathfrak{g}^\alpha,\ (\forall\alpha\in\Sigma)$$
$$\theta_\varepsilon(X)=\theta(X)\qquad\text{for } X\in\mathfrak{a}+\mathfrak{m}$$

で定義する．そして

$$\mathfrak{k}_\varepsilon=\{X\in\mathfrak{g};\ \theta_\varepsilon(X)=X\}$$

とおく．すると$\mathfrak{k}_\varepsilon$は$\mathfrak{k}$と複素化が同型である$\mathfrak{g}$の subalgebra になる．$\mathfrak{k}_\varepsilon$ から生成される G の analytic subgroup を K_ε^0，そして $K_\varepsilon = MK_\varepsilon^0$ とおく．さらに

$$M_\varepsilon^* = M^* \cap K_\varepsilon$$
$$W_\varepsilon = M_\varepsilon^*/M$$

とおき，$W_\varepsilon \backslash W$ の代表元を $w_1 = e, w_2, \cdots, w_r$ とする（$r = [W : W_\varepsilon$

<u>Lemma 1</u>（岩沢分解）

1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_\varepsilon + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ direct sum

2) $G \supset \bigcup_{i=1}^{r} K_\varepsilon m_{w_i} AN$ open dense, unique

以下では，affine symmetric space G/K_ε を考える．1. で述べた "Riemannian symmetric space G/K をある compact real analytic manifold に open に埋め込んだ時に，その外側にあらわれる" affine symmetric space は infinitesimal には上のような手続きで得られ，必ず G/K_ε の形にあらわせる．

3. G/K_ε の埋め込み

Riemannian symmetric space G/K の compact 化の 1 つの方法は大島 [3] にある．そこで定義された compact real analytic manifold の open G-orbit はすべて G/K

と同型である．　しかしその方法を少し修正すると，G/K と同型な open orbit から出発して closed orbit を越えて別の open orbit に移るとき $\mathfrak{g}$ の Cartan involution θ がある ε に対する $\mathfrak{g}$ の別の involution θ_ε に変り，その open orbit は G/K_ε と同型になる．　したがって，$\varepsilon : \Sigma \to \{-1, 1\}$ の定義の仕方は 2^l 通りの可能性があるので，K/M と同型な最も次元の低い G-orbit の近傍の open G-orbit は，すべての可能な ε に対応する affine symmetric space G/K_ε が1つづつあらわれる．　これから open orbit がすべての可能な G/K_ε である K/M の近傍が，大島[3]の方法とほぼ同様に定義できる．　root system Σ が reduced の場合には，このような K/M の近傍のコピーを $\# W$ コつじつまがあうようにはり合せることができて，G が real analytic に作用する connected compact real analytic manifold が定義できる．　構成の仕方から G/K，及び K/M と同型な G-orbit は $\# W$ コあらわれ，G/K_ε と同型な G-orbit は $\# W_\varepsilon$ コあり，その closure に含まれる K/M と同型は orbit は $r = [W : W_\varepsilon]$ コある．　Σ が non reduced の場合には，そのままでは連結でないのでその連結成分を考えればよい．　ここで述べた G/K 及び G/K_ε の compact 化は佐武の compact 化と関係があることに注意しておく(cf[4])

簡単な場合に open orbit としてどのような homog. space が表われるかを例示しておこう.

<u>例 1</u> $G=SL(2;\mathbb{R})$ root 系 A_1

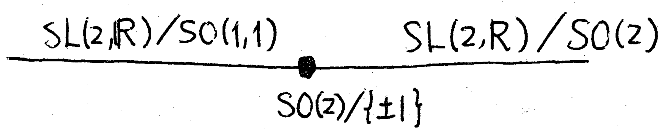
$\Sigma=\{\alpha,-\alpha\}$を root 系とする.

$\varepsilon(\alpha)=1$ のとき $G/K_\varepsilon=SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$,

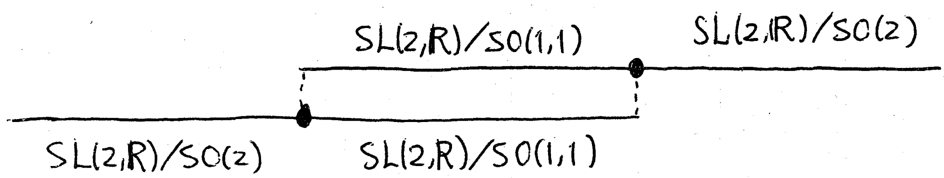
$\varepsilon(\alpha)=-1$ のとき 簡単な計算により

$G/K_\varepsilon=SL(2,\mathbb{R})/SO(1,1)$ がわかる.

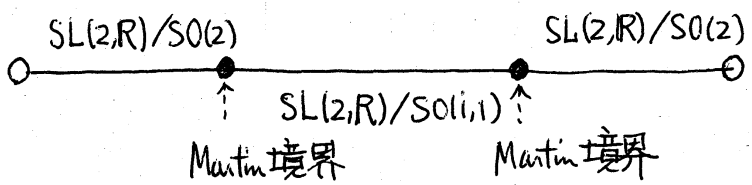
abelian part A の "compact 化" を図示しよう. Martin 境界の近傍として



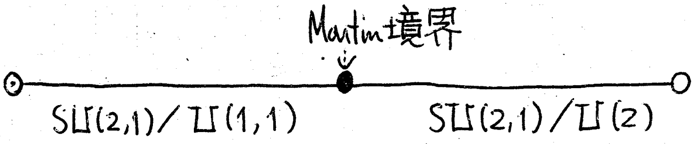
が得られる. これの2つのコピーを下のようにはり合せる.



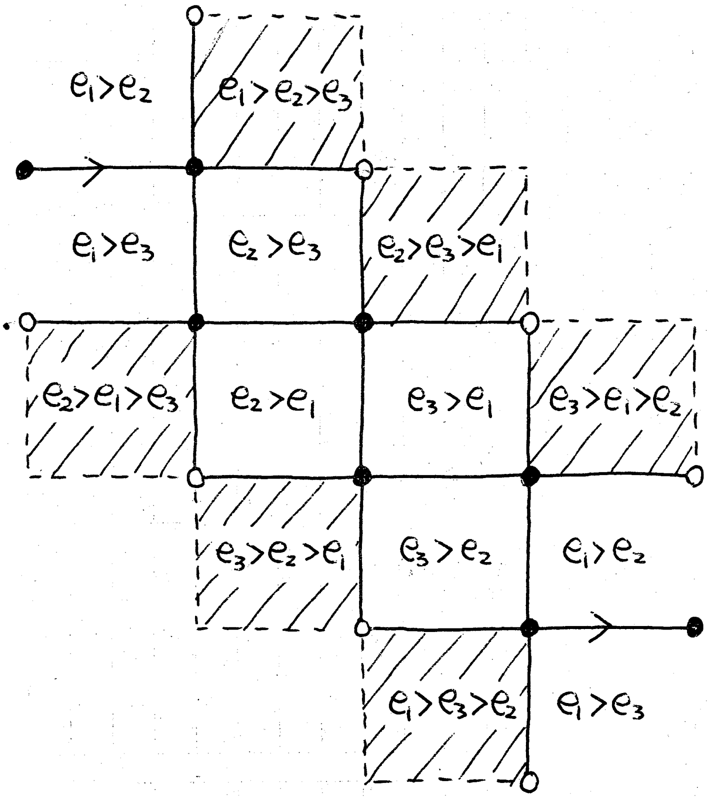
得られた結果を下の図のように表わす.



例 2. $G = SU(2,1)$ root系 BC_1



例 3 $G = SL(3,\mathbb{R})$ root系 A_2



斜線部 $\cong SL(3,\mathbb{R})/SO(3)$

$\{e_i > e_j\}$ の部分

$\cong SL(3,\mathbb{R})/SO(2,1)$

● Martin境界

(余次元 = 2)

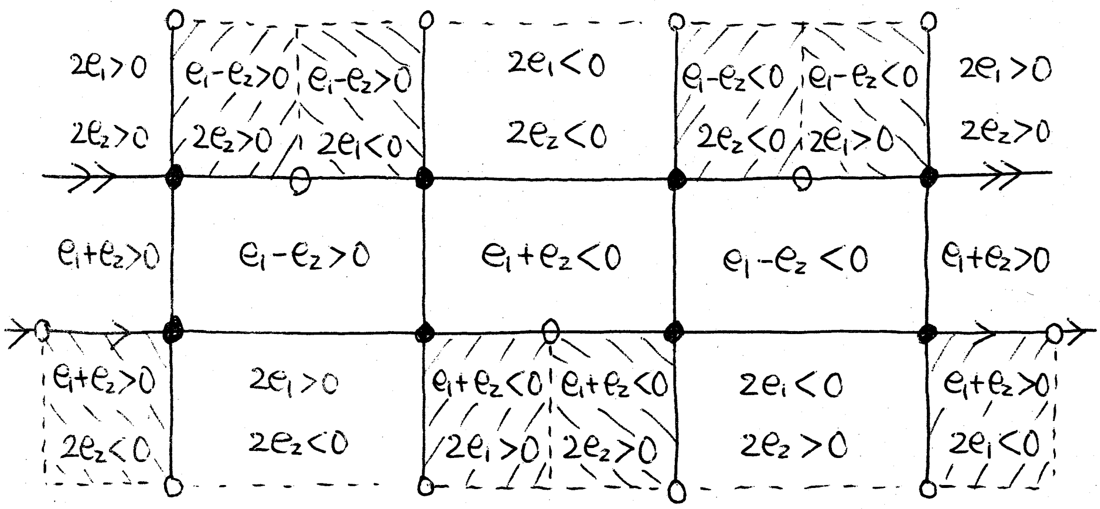
例 4 $G = Sp(2,\mathbb{R})$

斜線部 $\cong Sp(2,\mathbb{R})/U(2)$

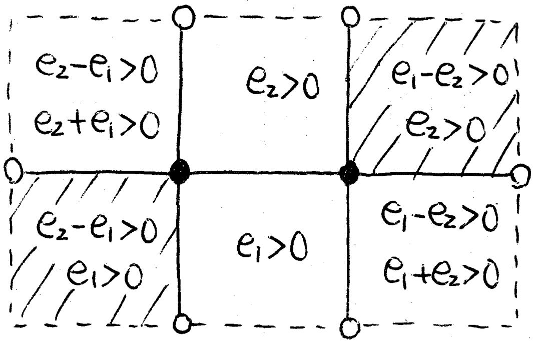
$\{e_1+e_2>0\}$ $\{e_1-e_2>0\}$ $\{e_1+e_2<0\}$ $\{e_1-e_2<0\}$

などの部分 $\cong Sp(2,\mathbb{R})/GL(2,\mathbb{R})$

$\{2e_1>0,\ 2e_2>0\}$などの部分 $\cong Sp(2,\mathbb{R})/U(1,1)$



例 5 $G=SU(3,2)$ root 系 BC_2



$\{e_1-e_2>0,\ e_2>0\},\ \{e_2-e_1>0,\ e_1>0\}$
$\cong SU(3,2)/S(U(3)\times U(2))$

$\{e_1\pm e_2>0\},\ \{e_2\pm e_1>0\}$
$\cong SU(3,2)/S(U(2)\times U(1,2))$

$\{e_1>0\},\ \{e_2>0\}$
$\cong SU(3,2)/S(U(2,1)\times U(1,1))$

Remark: 上で個々の図のワクの不等式は Riemannian (あるいは affine) symmetric space の Weyl chamber を表わしている. affine symmetric pair $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_\varepsilon)$ に対して W_ε に関する $\mathfrak{a}$ の基本領域 $\mathfrak{a}_\varepsilon^+$ をひとつ固定すれば, $A_\varepsilon^+=\exp \mathfrak{a}_\varepsilon^+$ として, $G/K_\varepsilon \cong K\overline{A_\varepsilon^+}K_\varepsilon/K_\varepsilon$ となる. $\mathfrak{a}_\varepsilon^+$ は上の例ではそれぞれの不等式で定義できるのである.

4. Poisson変換

$\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ を G/K_ε上の~~左G~~-不変微分作用素環とする.

<u>Lemma 2.</u> $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon) \cong \mathbb{D}(G/K)$

$$e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))} = \begin{cases} e^{\lambda(\log a)} & \text{if } g = k_\varepsilon m_{w_i} a n \in K_\varepsilon m_{w_i} AN \\ 0 & \text{if } g \notin K_\varepsilon m_{w_i} AN \end{cases}$$

で $e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))}$ を定義する.

<u>Lemma 3.</u> $e^{\lambda(H_\varepsilon^i(g))}$ は $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に関して有理的な G上の hyperfunction になる.

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon}^i(g) = \int_K e^{-(\lambda+\rho) H_\varepsilon^i(g^{-1}k)} dk$$

とおくと, $\varphi_{\lambda,\varepsilon}^i$ は K に関して左, K_εに関して右不変な G上の函数である. $\varphi_{\lambda,\varepsilon}^i$ を G/K_ε 上の函数とみたとき, $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ の同時固有函数になる.

さて, $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ から $\mathbb{C}$ への algebra hom. χ に対して

$$\mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi)) = \{ u \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon) ; \; Du = \chi(D) u \text{ for } \forall D \in \mathbb{D}(G/K_\varepsilon) \}$$

とおく. すると

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon}^{i} \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi_\lambda)) \qquad i=1,\cdots,r$$

となるような $\chi=\chi_\lambda$ が unique に定まる．さらに

$\Psi_{\lambda,\varepsilon}^{i}(g) = e^{-(\lambda+\rho)H_\varepsilon^i(g^{-1})}$ とおけば

$$\Psi_{\lambda,\varepsilon}^{i} \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon, \mathcal{M}(\chi_\lambda)) \qquad i=1,\cdots,r$$

もわかる．

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon} = (\varphi_{\lambda,\varepsilon}^{1}, \cdots, \varphi_{\lambda,\varepsilon}^{r})$$
$$\Psi_{\lambda,\varepsilon} = (\Psi_{\lambda,\varepsilon}^{1}, \cdots, \Psi_{\lambda,\varepsilon}^{r})$$

として vector 表示する．

<u>Def. 4</u>

$$\mathcal{P}_\lambda : \bigoplus_{r} \mathcal{B}(K/M) \longrightarrow \mathcal{B}(G/K_\varepsilon; \mathcal{M}(\chi_\lambda))$$

$$(\mathcal{P}_\lambda f)(g) = \int_K \left(\pi(k)\Psi_{\lambda,\varepsilon}\right)(g)\, f(k)\, dk$$

を Poisson 変換とよぶことにする．ただし

$$(\pi(k)\Psi_{\lambda,\varepsilon})(g) = (\Psi_{\lambda,\varepsilon}^{1}(k^{-1}g), \cdots, \Psi_{\lambda,\varepsilon}^{r}(k^{-1}g))$$

$$f(k) = \begin{bmatrix} f_1(k) \\ \vdots \\ f_r(k) \end{bmatrix} \qquad f_i \in \mathcal{B}(K/M) \quad i=1,\cdots,r$$

とおいた．

簡単な計算により

$$(\mathcal{P}_\lambda f)(g) = \int_K \Psi_{\lambda,\varepsilon}(k)\, \tilde{f}(gk)\, dk$$

と書き直せる．（ $\tilde{f}(gk) := f(\kappa(gk))\, e^{(\lambda-\rho)H(gk)}$ とおいた．）

5. 帯球函数

Def. 5.

$\mathcal{A}^K(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda))=\{u\in\mathcal{B}(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda));\ f(kg)=f(g),\ {}^\forall k\in K\}$

の元を (K, K_ε)-不変帯球函数と呼ぶことにする.

($\mathcal{B}(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$ の元で左 K-不変であれば, 必然的に real analytic になることに注意しておく.)

Lemma 6. $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{A}^K(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda))=r$

であり, その basis として $\{\varphi^1_{\lambda,\varepsilon},\cdots,\varphi^r_{\lambda,\varepsilon}\}$ をとれる.

Lemma 7. (函数等式)

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon}=\varphi_{w\lambda,\varepsilon}A_w(\lambda)\qquad\text{for } {}^\forall w\in W$$

ここで $A_w(\lambda)$ は $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ の meromorphic function を成分とする $r\times r$ 行列で, さらに

$$A_{w_1w_2}(\lambda)=A_{w_1}(w_2\lambda)A_{w_2}(\lambda)\qquad w_1,w_2\in W$$

が成立つ.

$A_w(\lambda)$ の各成分は $\{\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}};\ \frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\notin\mathbb{Z}\ \text{for } {}^\forall\alpha\in\Sigma\}$ で正則である. Gindikin - Karpelevič - Helgason - Schiffmann の方法によって, w が simple root に関する鏡映の場合には, $A_w(\lambda)$ の各成分を計算できる.

例1　$G = SL(2;\mathbb{R})$, $K_\varepsilon = SO(1,1)$, $N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} \right\}$ のとき
$W = \mathfrak{S}_2$, $W_\varepsilon = \{e\}$　$w = (1,2) \in \mathfrak{S}_2$ とおくと $W_\varepsilon \backslash W$ の代表元として e, w をとれる. (K, K_ε)-帯球函数は第2種の Legendre の函数で表わせる.

$\mu = \frac{\pi}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$ for $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ とおくと

$$A_e(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad A_w(\lambda) = \begin{bmatrix} \sec\mu & \tan\mu \\ \tan\mu & \sec\mu \end{bmatrix}$$

例2　$G = SL(3;\mathbb{R})$, $K_\varepsilon = SO(2,1) = \left\{ g \in G \,;\, {}^t g \begin{pmatrix} 1_2 & \\ & -1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_2 & \\ & -1 \end{pmatrix} \right\}$
$N^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\}$ のとき
$W = \mathfrak{S}_3$, $s_1 = (1,2)$, $s_2 = (2,3) \in \mathfrak{S}_3$ とおくと
$W_\varepsilon = \{e, s_1\} \cong \mathfrak{S}_2$. $W_\varepsilon \backslash W$ の代表元として
$w_1 = e$, $w_2 = s_2$, $w_3 = s_2 s_1$ をえらぶ.
$\mu_1 = \frac{\pi}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$　$\mu_2 = \frac{\pi}{2}(\lambda_3 - \lambda_2)$　$\mu_3 = \frac{\pi}{2}(\lambda_3 - \lambda_1)$
$(\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ とおくと

$$A_e(\lambda) = I_3 \quad A_{s_1}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \sec\mu_1 & \tan\mu_1 \\ & \tan\mu_1 & \sec\mu_1 \end{bmatrix}, \quad A_{s_2}(\lambda) = \begin{bmatrix} \sec\mu_2 & \tan\mu_2 & \\ \tan\mu_2 & \sec\mu_2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{s_1 s_2}(\lambda) = A_{s_1}(s_2\lambda) A_{s_2}(\lambda) \quad A_{s_2 s_1}(\lambda) = A_{s_2}(s_1\lambda) A_{s_1}(\lambda)$$

$$A_{s_1 s_2 s_1}(\lambda) = A_{s_1}(s_2 s_1 \lambda) A_{s_2 s_1}(\lambda).$$

例3　$G = Sp(2;\mathbb{R}) = \left\{ g \in SL(4;\mathbb{R}) \,;\, {}^t g \begin{bmatrix} & -1_2 \\ 1_2 & \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} & -1_2 \\ 1_2 & \end{bmatrix} \right\}$
$K_\varepsilon = \left\{ g \in G,\, {}^t g \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \right\} \cong U(1,1)$
$N^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & \\ & & * & 1 \end{bmatrix} \right\}$ のとき.

$W = \mathfrak{S}_2^{\pm}$. (e_1, e_2) を 直交基底とするとき

$$s_1 : (e_1, e_2) \to (e_2, e_1) \qquad s_2 : (e_1, e_2) \to (e_1, -e_2)$$

で s_1, s_2 を定義すると W は s_1, s_2 で生成される.
$W_\varepsilon = \{e, s_2, s_1 s_2 s_1, (s_1 s_2)^2\}$ となる. $W_\varepsilon \backslash W$ の代表元として $w_1 = e$, $w_2 = s_1$ をとる. さらに $\mu_1 = \frac{\pi}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$
$\mu_2 = \frac{\pi}{2}(\lambda_2 + \lambda_1)$ for $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ とおくと

$$A_e(\lambda) = A_{s_2}(\lambda) = 1_2 \qquad A_{s_1}(\lambda) = \begin{bmatrix} \tan\mu_1 & \sec\mu_1 \\ \sec\mu_1 & \tan\mu_1 \end{bmatrix}$$

他は $A_{w_1 w_2}(\lambda) = A_{w_1}(w_2\lambda) A_{w_2}(\lambda)$ を使えば求まる.

<u>例3 bis.</u> $K_\varepsilon = \{ g \in G \,;\, {}^t g \begin{bmatrix} 1_2 & \\ & -1_2 \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 1_2 & \\ & -1_2 \end{bmatrix} \} \cong GL(2; \mathbb{R})$ のとき. $W_\varepsilon = \{e; s_1\}$ となる. $W_\varepsilon \backslash W$ の代表元として $w_1 = e$, $w_2 = s_2$, $w_3 = s_2 s_1$, $w_4 = s_2 s_1 s_2$ をとる.

$$A_e(\lambda) = 1_4$$

$$A_{s_1}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \sec\mu_1 & \tan\mu_1 & \\ & \tan\mu_1 & \sec\mu_1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{s_2}(\lambda) = \begin{bmatrix} \sec 2(\mu_1+\mu_2) & -\tan 2(\mu_1+\mu_2) & & \\ -\tan 2(\mu_1+\mu_2) & \sec 2(\mu_1+\mu_2) & & \\ & & \sec 2(\mu_1+\mu_2) & -\tan 2(\mu_1+\mu_2) \\ & & -\tan 2(\mu_1+\mu_2) & \sec 2(\mu_1+\mu_2) \end{bmatrix}$$

6. 境界値

以下ではK_εを固定してG/K_εを考えることにする。3.で述べたようにG/K_εをcompact多様体に埋め込んだ時に、そのclosureにはK/Mと同型なhomog. spaceが$r=[W:W_\varepsilon]$コあらわれた。それらを$B_1,\cdots,B_r$で表わしG/K_εのMartin境界と呼ぶことにする。

<u>Lemma 8.</u> 微分方程式系

$$\mathfrak{M}(\chi_\lambda):\ Du=\chi_\lambda(D)u \quad \text{for } \forall D\in \mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$$

は各Martin境界をedgeとするそのまわりのカベに沿って確定特異点型である。(注) さらにその決定方程式の根は

$$\lambda(w)=\left(-\tfrac{1}{2}(w\lambda-\rho)(H_1),\cdots,-\tfrac{1}{2}(w\lambda-\rho)(H_l)\right)$$
$$\cancel{(-w\lambda(H_1),\cdots,-w\lambda(H_l))} \qquad w\in W$$

である。(cf. [2] [3])

$u\in\mathcal{B}(G/K_\varepsilon;\mathfrak{M}(\chi_\lambda))$に対してMartin境界$B_i$への決定方程式の根$\lambda(w)$に対応する境界値を$\beta^i_{w\lambda}u$であらわす。すると$\mathcal{B}(B_i)\cong\mathcal{B}(K/M)$の同一視でG-hom.

$$\beta_{w\lambda}:\mathcal{B}(G/K_\varepsilon;\mathfrak{M}(\chi_\lambda))\longrightarrow \overset{r}{\bigoplus}\mathcal{B}(K/M)$$

$$\beta_{w\lambda}u=\begin{bmatrix}\beta^1_{w\lambda}u\\ \vdots\\ \beta^r_{w\lambda}u\end{bmatrix}$$

(注) この埋め込みでは、正確には弱い意味で確定特異点型である。しかし簡単な座標変換でこのようにできる。

を定義できる. $B_1,\cdots,B_r$ のそえ字を適当に並べ変えて

$$c_{ji}(\lambda) = \beta_\lambda^j \varphi_{\lambda,\varepsilon}^i = \int_{\bar{N}} e^{-(\lambda+\rho)H_\varepsilon^i(\bar{w}_j \bar{n})} d\bar{n}$$

となるようにする. このときBruhatの理論によりPoisson核の境界値がわかり

$$\beta_\lambda^j \Phi_{\lambda,\varepsilon}^i = c_{ji}(\lambda)\delta(k)$$

となる. $\delta(k)$ は K/M 上のデルタ函数である. $c_{ji}(\lambda)$ は $c(\lambda) = \int_{\bar{N}} e^{-(\lambda+\rho)H(\bar{n})} d\bar{n}$ と (K,K_ε)-不変帯球函数の函数等式(Lemma 7)にあらわれた行列 $A_w(\lambda)$ であらわせる. 実際

$$\beta_\lambda \varphi_{\lambda,\varepsilon} = c(\lambda) E_\sigma A_{w^*}(\lambda)$$

がわかる. ここで E_σ は次のように定義される. $\{W_\varepsilon w_1,\cdots, W_\varepsilon w_r\} = \{W_\varepsilon w_1 w^*,\cdots, W_\varepsilon w_r w^*\}$ であるが $\sigma\in\mathfrak{S}_r$ を $W_\varepsilon w_i = W_\varepsilon w_{\sigma(i)} w^*$ となるようにえらぶとき $E_\sigma \in SL(r,\mathbb{R})$ は

$$E_\sigma \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(r)} \end{bmatrix} \qquad \text{for } \forall a_1,\cdots,a_r$$

となる行列である.

7. 同時固有函数の積分表示

はじめにRiemannian symmetric space G/K に対する1. で述べた結果を書いておこう. $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して条件

$$(*) \qquad \frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \notin \mathbb{Z} \qquad \text{for } \forall\alpha\in\Sigma$$

を仮定する(この条件はさらに弱めることもできるが元のままにしておく).

<u>Thm([2])</u>　Poisson変換

$$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{B}(K/M) \longrightarrow \mathcal{A}(G/K ; \mathcal{M}(\chi_\lambda))$$

$$(\mathcal{P}_\lambda f)(g) = \int_K e^{-(\lambda+\rho)H(g^{-1}k)} f(k)\, dk$$

は，条件(*)のもとで onto G-isomorphism である．

この結果は affine symmetric space G/K_ε に対してもほぼ同様な次の形に定式化される．

<u>Thm 9.</u>　Poisson 変換

$$\mathcal{P}_\lambda : \bigoplus^{r} \mathcal{B}(K/M) \longrightarrow \mathcal{B}(G/K_\varepsilon ; \mathcal{M}(\chi_\lambda))$$

は 条件(*)のもとで onto G-isomorphism である．

証明もほぼ同様である．ただし条件(*)を弱めるときに多少のちがいがおこる．

8. 特殊固有超函数

affine symmetric space 上の特殊固有函数をいくつか考えよう．

5. で (K, K_ε)-不変帯球函数を定義したが，もっと一般に $(K_{\varepsilon'}, K_\varepsilon)$-不変帯球函数を定義できる．

$$\mathcal{B}^{K_{\varepsilon'}}(G/K_\varepsilon ; \mathcal{M}(\chi_\lambda))$$

$$= \{ u \in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon ; \mathcal{M}(\chi_\lambda)) \; ; \; u(k_{\varepsilon'} g) = u(g) \text{ for } {}^\forall k_{\varepsilon'} \in K_{\varepsilon'} \}$$

の元がそうである. $K_{\varepsilon'}$ は K_ε と同様に定義した G の subgroup である. $e^{\lambda(H^i_\varepsilon(g))}$ などと同様に $K_{\varepsilon'}$ についての"岩沢分解"を使って $e^{\lambda(H_{\varepsilon'}(g))}$ を考えることができるが, そのとき

$$\int_K e^{(\lambda-\rho)H_{\varepsilon'}(gk)} e^{-(\lambda+\rho)H^i_\varepsilon(k)} \, dk$$

などがそれである. このように一般的にするともはや実解析的でなくなる. しかしこれらの"帯球函数"はよく知られた両側 K-不変な帯球函数と無縁ではない. それらは同じ確定特異点型の微分方程式の解になっており, いくつかの異なった cycle に関する積分表示を与えているのである. また Poisson 核 $\mathfrak{P}^i_{\lambda,\varepsilon}(g) = e^{-(\lambda+\rho)H^i_\varepsilon(g^{-1})}$ も同様に極大過剰決定系をみたす. $\mathfrak{P}^i_{\lambda,\varepsilon}(g)$ は Riemannian symmetirc space 上の Poisson 核の解析接続によって得られる.

(K, K_ε)-不変帯球函数, Poisson 核の境界値は意味がある. 前者は"c-function"を与え, 後者は intertwining operator の核函数(の定数倍)になる.

他に $\mathcal{B}(G/K_\varepsilon ; \mathcal{M}(\chi_\lambda))$ の元で興味深いものがある. G を semisimple linear group, $G_{\mathbb{Z}}$ を G の $\mathbb{Z}$-点とする. そして Eisenstein series

$$E(g;\lambda) = \sum_{h \in G_{\mathbb{Z}}} e^{-(\lambda+\rho)H(g^{-1}h)}$$

を考えよう.

$$E(g;\lambda)\in \mathcal{A}(G/K;\mathfrak{M}(\chi_\lambda))$$

であるから $E(g;\lambda)$ の境界値を定義できる. λ が generic であるとき, さらに affine symmetric space G/K_ε に Poisson 変換することにより, G/K_ε 上の保型性を有する固有函数が定義でき, 函数等式が得られる. もっと一般に,

$$\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}(G/K_\varepsilon;\mathfrak{M}(\chi_\lambda))$$
$$=\{u\in \mathcal{B}(G/K_\varepsilon;\mathfrak{M}(\chi_\lambda))\,;\,u(hg)=u(g)\ \text{for}\ \forall h\in G_{\mathbb{Z}}\}$$

の元を Eisenstein hyperfunction と仮りに呼ぼう. (λ が generic でないとまずい) このとき $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}(G/K_\varepsilon;\mathfrak{M}(\chi_\lambda))$ の次元, またその元の満たす函数等式などが問題になるがまだくわしいことはわからない. "帯球函数" や Poisson 核と同様 $E(g;\lambda)$ の境界値には意味があるかもしれない.

<u>例</u> $G=SL(2;\mathbb{R})$, $K=SO(2)$, $G_{\mathbb{Z}}=SL(2;\mathbb{Z})$ のとき,

$$G/K\cong H=\{z\in\mathbb{C}\,;\,\mathrm{Im}\,z>0\}$$

$$E(z;s)=\sum_{(c,d)=1}\frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}\quad (z=x+\sqrt{-1}\,y)$$

決定方程式の根 s, $1-s$ に対する境界値を $\beta_s E$, $\beta_{1-s}E$ などであらわせば

$$\beta_s E = \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{|cx+d|^{2s}}$$

$$\beta_{1-s} E = 2c(s) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^{2s}} \sum_{(c,d)=1} \delta\left(x+\frac{d}{c}\right)$$

ここで　$c(s) = B(\frac{1}{2}, s-\frac{1}{2})$ である. これらを $G/K_\varepsilon = SL(2,\mathbb{R})/SO(1,1)$ に Poisson 変換すれば Eisenstein hyper function が得られる.

$\beta_{1-s}E$ の係数にはデルタ函数があるが, その代りに Heaviside 函数をもってきたりして, $G/K \cong H$ に Poisson 変換したものなども意味がありそうである. (保型形式になる).

References

[1] M. Berger: Les espaces symétriques non compacts Ann. Ec. Norm. Sup., 74 (1957) 85~177

[2] K. Okamoto 他5名: Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, to appear

[3] T. Oshima: A realization of Riemannian Symmetric spaces 本講究録にのる予定

[4] I. Satake: On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces, Ann. of Math. vol. 71 1960